# Geodätisches Koordinatensystem

6. Tensoranalysisübung Anne Moisel / Pauline Meyer / Sylvie Ludig / Stefan Knorr

## a) Bestimmen der Transformationsgleichung $\mathcal{A}$ : $\mathbf{q}(x, y) \mapsto \hat{\mathbf{q}}(\alpha, \beta)$

Aus der Skizze kann abgelesen werden :

```
gegeben1 = Tan[α] == y/(a/2 + x);
gegeben2 = Tan[β] == y/(a/2 - x);
```

Auflösen der Gleichungen nach x und y um die Transformationsgleichung $\mathcal{A}$ : $\mathbf{q} \mapsto \hat{\mathbf{q}}$ zu erhalten ($\hat{\mathbf{q}} = (\alpha, \beta)$) :

```
solved = Solve[{gegeben1, gegeben2}, {x, y}];
q = {{solved[[1]][[1]][[2]], solved[[1]][[2]][[2]]}};
MatrixForm[Transpose[q]]
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{a\,\mathrm{Tan}[\alpha] - a\,\mathrm{Tan}[\beta]}{2\,(\mathrm{Tan}[\alpha] + \mathrm{Tan}[\beta])} \\ \frac{a\,\mathrm{Tan}[\alpha]\,\mathrm{Tan}[\beta]}{\mathrm{Tan}[\alpha] + \mathrm{Tan}[\beta]} \end{pmatrix}$$

## b) Bestimmen der JAKOBImatrix $A_i^{\hat{j}}$ des Koordinatenwechsels

Ableiten der $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x(\alpha, \beta) \\ y(\alpha, \beta) \end{pmatrix}$ nach $\alpha$ und $\beta$

```
Aij = ( ∂α q[[1]][[1]]  ∂β q[[1]][[1]]
        ∂α q[[1]][[2]]  ∂β q[[1]][[2]] ) // Simplify;
MatrixForm[Aij]
```

$$\begin{pmatrix} -a\,\mathrm{Cos}[\beta]\,\mathrm{Csc}[\alpha+\beta]^2\,\mathrm{Sin}[\beta] & a\,\mathrm{Cos}[\alpha]\,\mathrm{Csc}[\alpha+\beta]^2\,\mathrm{Sin}[\alpha] \\ a\,\mathrm{Csc}[\alpha+\beta]^2\,\mathrm{Sin}[\beta]^2 & a\,\mathrm{Csc}[\alpha+\beta]^2\,\mathrm{Sin}[\alpha]^2 \end{pmatrix}$$

## c) Bestimmen der Singulatitäten des Koordinatenwechsels

Zunächst wird die Determinante der von $A_i^{\hat{j}}$ bestimmt :

```
detAij = Det[Aij] // Simplify
```

$$-a^2\,\mathrm{Csc}[\alpha+\beta]^3\,\mathrm{Sin}[\alpha]\,\mathrm{Sin}[\beta]$$

Bestimmung der Nullstellen der Determinate

```
Solve[{detAij == 0}, {α, β}]
```

$\{\{\alpha \to 0\}, \{\beta \to 0\}\}$

Bei $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ besitzt das geodätische Koordinatensystem Singulatitäten, denn dann ist die Bestimmung des jeweils anderen Winkels nicht mehr möglich. Punkte auf der x Achse können also nicht mit geodätischen Koordinaten beschrieben werden.

## ■ d) Bestimmen der natürlichen Basis $g_i$

Bestimmung des Basisvektors $\mathbf{g}_i = \partial_i \mathbf{q}$, $i = \alpha, \beta$

```
g1 = ∂α q // Simplify;
g2 = ∂β q // Simplify;
MatrixForm[Transpose[g1]]
MatrixForm[Transpose[g2]]
```

$$\begin{pmatrix} -a \operatorname{Cos}[\beta] \operatorname{Csc}[\alpha+\beta]^2 \operatorname{Sin}[\beta] \\ a \operatorname{Csc}[\alpha+\beta]^2 \operatorname{Sin}[\beta]^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \operatorname{Cos}[\alpha] \operatorname{Csc}[\alpha+\beta]^2 \operatorname{Sin}[\alpha] \\ a \operatorname{Csc}[\alpha+\beta]^2 \operatorname{Sin}[\alpha]^2 \end{pmatrix}$$

## ■ e) Bestimmen der Metrik $g_{ij}$ und inversen Metrik $g^{ij}$

Es gilt : $g_{ij} = \mathbf{g}_i . \mathbf{g}_j$

```
Metrik = ( g1[[1]].g1[[1]]  g1[[1]].g2[[1]]
           g2[[1]].g1[[1]]  g2[[1]].g2[[1]] ) // Simplify;
MatrixForm[Metrik]
```

$$\begin{pmatrix} a^2 \operatorname{Csc}[\alpha+\beta]^4 \operatorname{Sin}[\beta]^2 & -a^2 \operatorname{Cot}[\alpha+\beta] \operatorname{Csc}[\alpha+\beta]^3 \operatorname{Sin}[\alpha] \operatorname{Sin}[\beta] \\ -a^2 \operatorname{Cot}[\alpha+\beta] \operatorname{Csc}[\alpha+\beta]^3 \operatorname{Sin}[\alpha] \operatorname{Sin}[\beta] & a^2 \operatorname{Csc}[\alpha+\beta]^4 \operatorname{Sin}[\alpha]^2 \end{pmatrix}$$

Es gilt $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$

```
MetrikInverse = Inverse[Metrik] // Simplify;
MatrixForm[MetrikInverse]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{\operatorname{Csc}[\beta]^2 \operatorname{Sin}[\alpha+\beta]^2}{a^2} & \frac{\operatorname{Cos}[\alpha+\beta] \operatorname{Csc}[\alpha] \operatorname{Csc}[\beta] \operatorname{Sin}[\alpha+\beta]^2}{a^2} \\ \frac{\operatorname{Cos}[\alpha+\beta] \operatorname{Csc}[\alpha] \operatorname{Csc}[\beta] \operatorname{Sin}[\alpha+\beta]^2}{a^2} & \frac{\operatorname{Csc}[\alpha]^2 \operatorname{Sin}[\alpha+\beta]^2}{a^2} \end{pmatrix}$$

## ■ f) Bestimmen der Dualbasis $g^i$

Es gilt $\overset{i}{\mathbf{g}} = g^{ij} \mathbf{g}_j$

```
g1 D = MetrikInverse.Transpose[g1] // Simplify;
g2 D = MetrikInverse.Transpose[g2] // Simplify;
MatrixForm[g1 D]
MatrixForm[g2 D]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{-\mathrm{Cot}[\beta]+\mathrm{Cos}[\alpha+\beta]\ \mathrm{Csc}[\alpha]\ \mathrm{Sin}[\beta]}{a} \\ \frac{\mathrm{Csc}[\alpha]\ (-\mathrm{Cos}[\beta]\ \mathrm{Cos}[\alpha+\beta]+\mathrm{Csc}[\alpha]\ \mathrm{Sin}[\beta]^2)}{a} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{Csc}[\beta]\ (\mathrm{Cos}[\alpha+\beta]+\mathrm{Cos}[\alpha]\ \mathrm{Csc}[\beta])\ \mathrm{Sin}[\alpha]}{a} \\ \frac{1+\mathrm{Cos}[\alpha]\ \mathrm{Cos}[\alpha+\beta]\ \mathrm{Csc}[\beta]}{a} \end{pmatrix}$$

## zu d) Darstellung der Richungen in einer Skizze

### Vordefinitionen für die grafische Ausgabe

Laden das Arrow Paketes
Definition von a = 2
Definition der Punktkoordinaten x, y als Funktionen der Winkel $\alpha$ und $\beta$
Definition der Basisvektorenkoordinaten $g_1$ und $g_2$,
die zu dem Punkt P gehören und der normierten Koordinaten

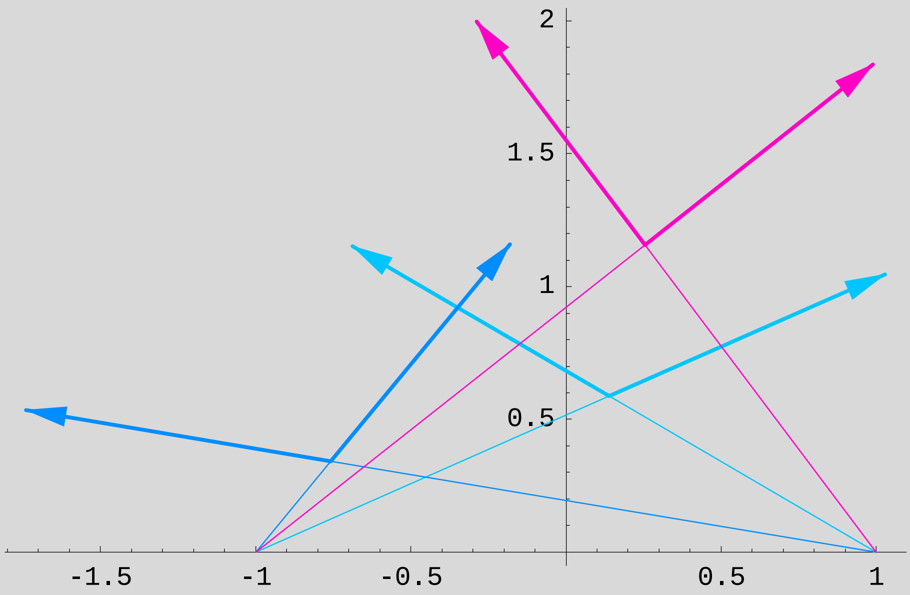
```
<< Graphics`Arrow`
a = 2;
x[α_, β_] = q[[1]][[1]];
y[α_, β_] = q[[1]][[2]];
G1x[α_, β_] = g1[[1]][[1]]; G1y[α_, β_] = g1[[1]][[2]];
G2x[α_, β_] = g2[[1]][[1]]; G2y[α_, β_] = g2[[1]][[2]];

g1x[α_, β_] = g1[[1]][[1]] / Sqrt[G1x[α, β]^2 + G1y[α, β]^2];
g1y[α_, β_] = g1[[1]][[2]] / Sqrt[G1x[α, β]^2 + G1y[α, β]^2];
g2x[α_, β_] = g2[[1]][[1]] / Sqrt[G2x[α, β]^2 + G2y[α, β]^2];
g2y[α_, β_] = g2[[1]][[2]] / Sqrt[G2x[α, β]^2 + G2y[α, β]^2];
```

Definition eines Grafikelementes (LinienUndBasisVektoren = LuB),
das die Linien von (-1, 0) und (1, 0) zum Punkt P,
sowie die Basisvektoren am Punkt P darstellt.

```
LuB[α_, β_] =
  {Hue[(β + α)/2], Thickness[0.005],
   Arrow[ {x[α, β], y[α, β]},
    {g1x[α, β] + x[α, β], g1y[α, β] + y[α, β]}, HeadScaling → Absolute],
   Arrow[ {x[α, β], y[α, β]}, {g2x[α, β] + x[α, β], g2y[α, β] + y[α, β]},
    HeadScaling → Absolute],
   Hue[(β + α)/2], Thickness[0.002],
   Line[{{-1, 0}, {x[α, β], y[α, β]}}],
   Line[{{+1, 0}, {x[α, β], y[α, β]}}]
  };
```

- **Graphische Darstellung verschiedener Basisvektoren**

```
Show[Graphics[Table[{LuB[Random[], Random[]]}, {3}]],
 PlotRange → All, Axes → True]
```




- Graphics -