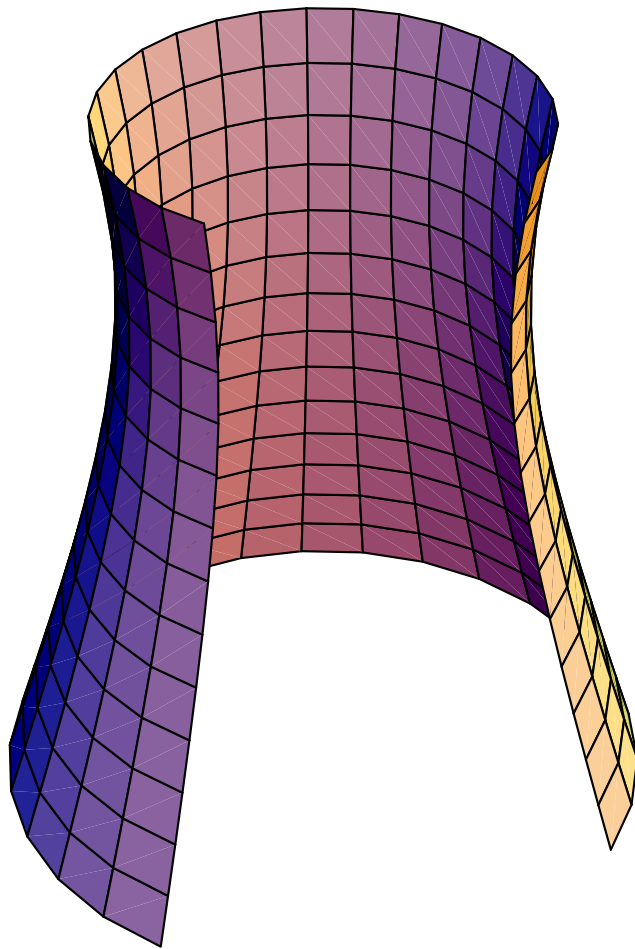


Schalentheorie Übungsblatt 1

Stefan Knorr - 200476

19.11.2002



Beschreibung der Mittelfläche

Die Mittelfläche der Kühlturmschale ist eine Rotationsfläche, deren erzeugende Funktion $f(z)$ durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$f(z) = \tilde{r} + \frac{b}{a} \sqrt{(z - \tilde{z})^2 + a^2} \quad (1)$$

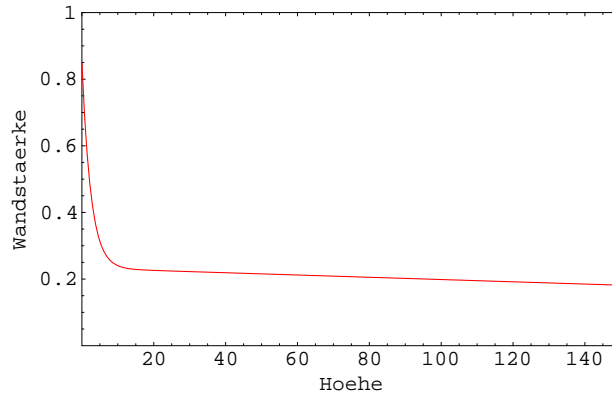
dabei besitzen die Parameter a, b, \tilde{r} und \tilde{z} folgende Werte:

$$\begin{aligned} a &= 50 \text{ m} \\ b &= 17,48 \text{ m} \\ \tilde{r} &= 20,93 \text{ m} \\ \tilde{z} &= 118 \text{ m} \end{aligned} \quad (2)$$

Die Dickenverteilung der Schale ist durch die Funktion $h(z)$ festgelegt:

$$h(z) = 0,2326 - \frac{0,05}{147} z + 0,6174 e^{\frac{z}{7,5} \log \frac{3}{61,74}} \quad (3)$$

Der Verlauf der Funktion $h(z)$ über der Höhe z sieht folgendermassen aus:



Der Ortsvektor $\mathbf{r}(\varphi, z)$ zu einem beliebigen Punkt der Mittelfläche lässt sich wie folgt notieren:

$$\mathbf{r}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} f \cos(\varphi) \\ f \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}, \quad (4)$$

dies gilt allgemein für jede rotationssymmetrische Fläche bezüglich der z-Achse. Unter Verwendung der Erzeugendengleichung für $f(z)$ ergibt sich:

$$\mathbf{r}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \left(\tilde{r} + \frac{b}{a} \sqrt{(z - \tilde{z})^2 + a^2} \right) \\ \sin(\varphi) \left(\tilde{r} + \frac{b}{a} \sqrt{(z - \tilde{z})^2 + a^2} \right) \\ z \end{pmatrix} \quad (5)$$

Teilaufgabe a

Die kovarianten Basisvektoren \mathbf{a}_α werden nach $\mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha}$ gebildet. Somit gilt für \mathbf{a}_φ und \mathbf{a}_s :

$$\mathbf{a}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \left(\tilde{r} + \frac{b}{a} \sqrt{(z-\tilde{z})^2 + a^2} \right) \\ \cos(\varphi) \left(\tilde{r} + \frac{b}{a} \sqrt{(z-\tilde{z})^2 + a^2} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{a}_s = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2 (z-\tilde{z})^2}{a^2 (a^2 + (z-\tilde{z})^2)}}} \begin{pmatrix} \frac{b(z-\tilde{z}) \cos(\varphi)}{a \sqrt{a^2 + (z-\tilde{z})^2}} \\ \frac{b(z-\tilde{z}) \sin(\varphi)}{a \sqrt{a^2 + (z-\tilde{z})^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Diese Basisvektoren liegen in der Mittelfläche der Schale. Um den Ortsvektor \mathbf{x} eines beliebigen Punktes der Schale zu beschreiben, also die räumliche Ausdehnung der Schale zu erfassen, wird zusätzlich ein zur Basis \mathbf{a}_α linear unabhängiger Vektor benötigt. Es bietet sich der Normalenvektor \mathbf{n} an, der senkrecht auf der von \mathbf{a}_α aufgespannten Ebene steht. Er kann über das Kreuzprodukt dargestellt werden und ist zweckmässiger Weise zu normieren:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_\varphi \times \mathbf{a}_s}{|\mathbf{a}_\varphi \times \mathbf{a}_s|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2 (z-\tilde{z})^2}{a^2 (a^2 + (z-\tilde{z})^2)}}} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \frac{b(z-\tilde{z})}{a^2 \sqrt{a^2 + (z-\tilde{z})^2}} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Die Bestimmung des kovarianten Masstensors $a_{\alpha\beta}$ erfolgt aus dem Skalarprodukt der kovarianten Basisvektoren:

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta = \begin{pmatrix} \frac{(b \sqrt{a^2 + (z-\tilde{z})^2} + a \tilde{r})^2}{a^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Da der Masstensor nur Diagonalelemente besitzt, muss die Basis \mathbf{a}_α eine orthogonale Basis sein.

Um die kontravariante Basis \mathbf{a}^α zu bestimmen, bietet sich die Darstellung über den kontravarianten Masstensor $a^{\alpha\beta}$ an. Er wird durch Invertierung des kovarianten Masstensors dargestellt:

$$a^{\alpha\beta} = (a_{\alpha\beta})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{(b \sqrt{a^2 + (z-\tilde{z})^2} + a \tilde{r})^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Mittels des kontravarianten Masstensors können nun die kontravarianten Basisvektoren \mathbf{a}^α bestimmt werden:

$$\mathbf{a}^\varphi = a^{\varphi\varphi} \mathbf{a}_\varphi = \begin{pmatrix} -\frac{a \sin \varphi}{b \sqrt{a^2+(z-\bar{z})^2+a \tilde{r}}} \\ \frac{a \cos \varphi}{b \sqrt{a^2+(z-\bar{z})^2+a \tilde{r}}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{a}^s = a^{ss} \mathbf{a}_s = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2 (z-\bar{z})^2}{a^2 (a^2+(z-\bar{z})^2)}}} \begin{pmatrix} \frac{b (z-\bar{z}) \cos \varphi}{a \sqrt{a^2+(z-\bar{z})^2}} \\ \frac{b (z-\bar{z}) \sin \varphi}{a \sqrt{a^2+(z-\bar{z})^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Teilaufgabe b

Die normierten Basisvektoren \mathbf{e}_α in physikalischen Komponenten bilden zusammen mit dem oben bestimmten Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} eine Orthonormalbasis. Für die normierten Basisvektoren gilt $\mathbf{e}_\alpha = \frac{\mathbf{a}_\alpha}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}}$:

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{\mathbf{a}_\varphi}{\sqrt{a_{\varphi\varphi}}} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{e}_s = \frac{\mathbf{a}_s}{\sqrt{a_{ss}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2 (z-\bar{z})^2}{a^2 (a^2+(z-\bar{z})^2)}}} \begin{pmatrix} \frac{b (z-\bar{z}) \cos(\varphi)}{a \sqrt{a^2+(z-\bar{z})^2}} \\ \frac{b (z-\bar{z}) \sin(\varphi)}{a \sqrt{a^2+(z-\bar{z})^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Teilaufgabe c

Die kovariante Darstellung des Krümmungstensors kann durch $b_{\alpha\beta} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_{\beta,\alpha}$ erzeugt werden. Es ergibt sich:

$$b_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2 (z-\bar{z})^2}{a^2 (a^2+(z-\bar{z})^2)}}} \begin{pmatrix} -\frac{(b \sqrt{a^2+(z-\bar{z})^2+a \tilde{r}})}{a} & 0 \\ 0 & \frac{a^3 b (a^4+a^2(z-\bar{z})^2-b^2(z-\bar{z})^2)}{\sqrt{a^2+(z-\bar{z})^2} (a^4+a^2(z-\bar{z})^2+b^2(z-\bar{z})^2)^2} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Für den Krümmungstensor in gemischter Darstellung gilt nun $b_\alpha^\beta = a^{\beta\gamma} b_{\alpha\gamma}$:

$$b_\alpha^\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2 (z-\bar{z})^2}{a^2 (a^2+(z-\bar{z})^2)}}} \begin{pmatrix} -\frac{a}{(b \sqrt{a^2+(z-\bar{z})^2+a \tilde{r}})} & 0 \\ 0 & \frac{a^3 b (a^4+a^2(z-\bar{z})^2-b^2(z-\bar{z})^2)}{\sqrt{a^2+(z-\bar{z})^2} (a^4+a^2(z-\bar{z})^2+b^2(z-\bar{z})^2)^2} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Die CHRISTOFFEL-Symbole werden nach $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{a}^\lambda$ gebildet. Im Folgenden werden sie in der Form von zwei 2x2 Matrizen $\Gamma_{\alpha\beta}^1$ und $\Gamma_{\alpha\beta}^2$ dargestellt:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2 (z-\tilde{z})^2}{a^2 (a^2+(z-\tilde{z})^2)}}} \begin{pmatrix} \frac{b(z-\tilde{z})}{\sqrt{a^2+(z-\tilde{z})^2} (b\sqrt{a^2+(z-\tilde{z})^2+a\tilde{r}})} & 0 \\ 0 & \frac{b(z-\tilde{z})}{\sqrt{a^2+(z-\tilde{z})^2} (b\sqrt{a^2+(z-\tilde{z})^2+a\tilde{r}})} \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2 (z-\tilde{z})^2}{a^2 (a^2+(z-\tilde{z})^2)}}} \begin{pmatrix} -\frac{b(z-\tilde{z})(b\sqrt{a^2+(z-\tilde{z})^2+a\tilde{r}})}{a^2\sqrt{a^2+(z-\tilde{z})^2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Teilaufgabe d

Aus den beiden Invarianten¹ des Krümmungstensors können die mittlere Krümmung H sowie die GAUSS'sche Krümmung K bestimmt werden.

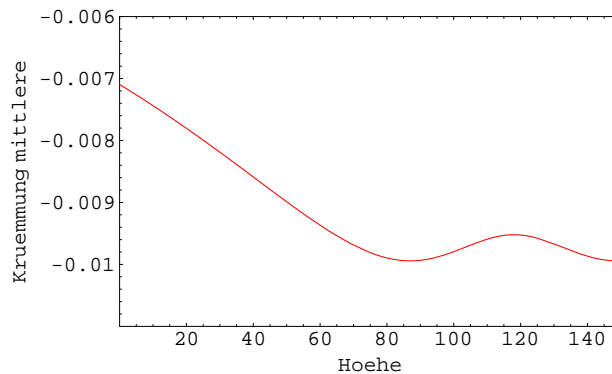
Für die mittlere Krümmung gilt:

$$H = \frac{1}{2}(b_1^1 + b_2^2) = \frac{a^2 b (a^4 + a^2 (z - \tilde{z})^2 - b^2 (z - \tilde{z})^2)}{\sqrt{a^2 + (z - \tilde{z})^2} (a^4 + a^2 (z - \tilde{z})^2 + b^2 (z - \tilde{z})^2)^2} - \frac{1}{b\sqrt{a^2 + (z - \tilde{z})^2 + a\tilde{r}}} \quad (19)$$

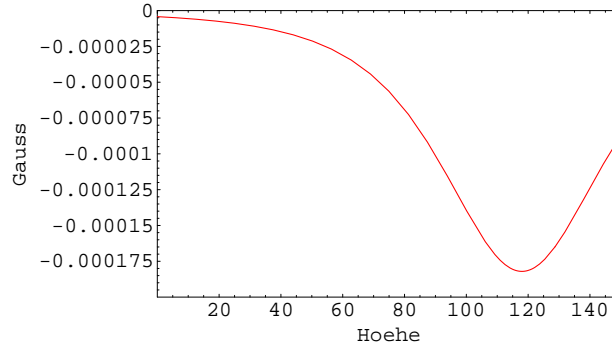
Für die GAUSS'sche Krümmung gilt:

$$K = b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1 = -\frac{a^6 b \sqrt{a^2 + (z - \tilde{z})^2} (a^4 + a^2 (z - \tilde{z})^2 - b^2 (z - \tilde{z})^2)}{(a^4 + a^2 (z - \tilde{z})^2 + b^2 (z - \tilde{z})^2)^3 \left(b\sqrt{a^2 + (z - \tilde{z})^2 + a\tilde{r}} \right)} \quad (20)$$

Unter Verwendung der in gegebenen Parameterwerte (2) lassen sich die beiden Krümmungen als Funktionen der Höhe darstellen. Es ergeben sich folgende Funktionsverläufe:



¹In Falle einer 2x2 Matrix die Spur und die Determinante.



Die GAUSS'sche Krümmung ist erwartungsgemäss negativ, da beide Krümmungskreis-mittelpunkte auf verschiedenen Seiten der Mittelfläche liegen.

Teilaufgabe e

Der Nablaoperator im Schalenraum ergibt sich zu $\nabla = (\mathbf{E}_2 - \eta\mathbf{B})^{-1} \cdot \nabla_2 + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \eta}$. Da die Invertierung von Matrizen recht aufwendig sein kann, wird oft folgende Näherung vorgenommen: $(\mathbf{E}_2 - \eta\mathbf{B})^{-1} \approx (\mathbf{E}_2 + \eta\mathbf{B}) \approx \mathbf{E}_2$. Die Qualität dieser Näherung wird nun am konkreten Beispiel bei $z = 0\text{ m}$ und $z = 150\text{ m}$ beurteilt.

Bei $z = 0\text{ m}$ ergeben sich folgende Werte für η , B_I und B_{II} ²:

$$\begin{aligned}\eta &= 0.425\text{ m} \\ B_I &= -0.014481\text{ m}^{-1} \\ B_{II} &= 0.000291\text{ m}^{-1}\end{aligned}\tag{21}$$

Es ergibt sich:

$$(\mathbf{E}_2 - \eta\mathbf{B})^{-1}|_{z=0\text{ m}} = \begin{pmatrix} 0.99388 & 0 \\ 0 & 1.00012 \end{pmatrix}\tag{22}$$

$$(\mathbf{E}_2 + \eta\mathbf{B})|_{z=0\text{ m}} = \begin{pmatrix} 0.99385 & 0 \\ 0 & 1.00012 \end{pmatrix}\tag{23}$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\tag{24}$$

Bei $z = 150\text{ m}$ ergeben sich folgende Werte für η , B_I und B_{II} :

$$\begin{aligned}\eta &= 0.091\text{ m} \\ B_I &= -0.023575\text{ m}^{-1} \\ B_{II} &= 0.003693\text{ m}^{-1}\end{aligned}\tag{25}$$

² B_I und B_{II} sind die Komponenten des Krümmungstensors in gemischter Darstellung:
 $b_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} B_I & 0 \\ 0 & B_{II} \end{pmatrix}$

Nun gilt:

$$(\mathbf{E}_2 - \eta \mathbf{B})^{-1}|_{z=150 m} = \begin{pmatrix} 0.99786 & 0 \\ 0 & 1.00034 \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$(\mathbf{E}_2 + \eta \mathbf{B})|_{z=150 m} = \begin{pmatrix} 0.99786 & 0 \\ 0 & 1.00034 \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

Es zeigt sich, dass die Ergebnisse von (22)-(24) sowie (25)-(27) recht gut übereinstimmen. Bei $z = 0 m$ und $z = 150 m$ ist der Fehler kleiner als 1%. Bei $z = 0 m$ ist der Fehler grösser, was sich u.a. auf eine höhere Schalendicke zurückführen lässt. Bei dickeren Schalen sollte zur Verkleinerung der Fehlers nur die Näherung $(\mathbf{E}_2 - \eta \mathbf{B})^{-1} \approx (\mathbf{E}_2 + \eta \mathbf{B})$ verwendet werden. Im Beispiel ergibt sich dadurch ein Fehler von weniger als 0,01%.

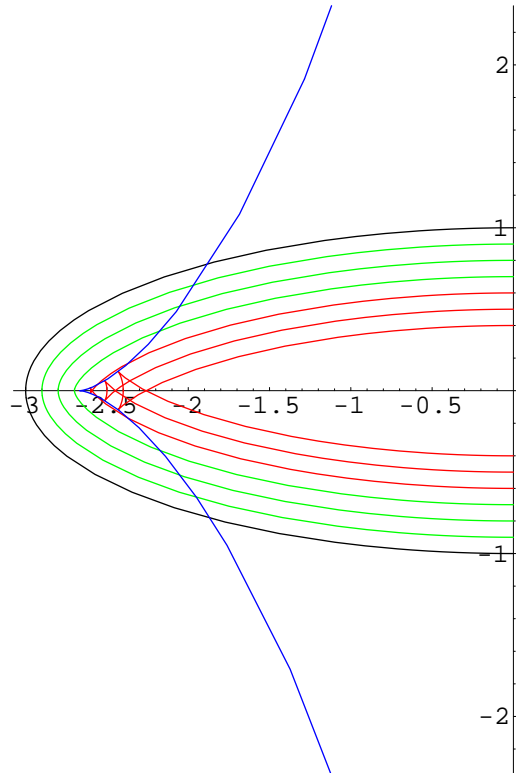
Teilaufgabe f

Das Problem der Überschneidung einer Schale kann auftreten, wenn der kleinste Krümmungsradius der Mittelfläche und die Schalendicke die gleiche Grössenordnung besitzen. Da die Schalendicke durch $\eta \mathbf{n}$ beschrieben wird, also stets normal zur Mittelfläche 'aufgetragen' wird, kann es bei entsprechend grossen Werten für η zu einer Durchdringung der Schale kommen.

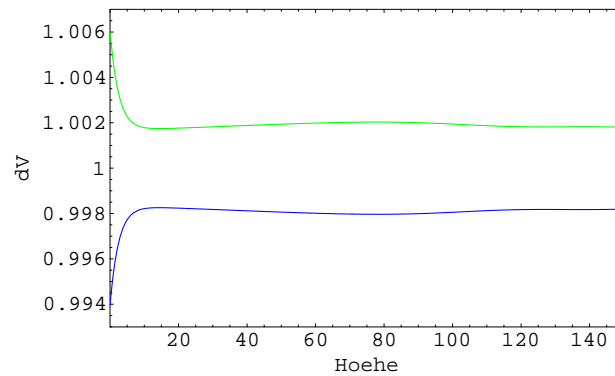
Hierzu ein zweidimensionales, graphisches Beispiel:

Ausgehend von einer elliptischen Mittellinie (*schwarz*) werden neue Kurven dadurch erzeugt, dass sie einen konstanten, senkrechten Abstand zur Mittellinie besitzen. Kurven deren Abstand kleiner als der minimale Krümmungsradius der Mittellinie ist, besitzen keine Überschneidung (*grün*). Ist der Abstand zur Mittellinie jedoch grösser, so tritt Überschneidung auf (*rot*). Der Effekt tritt erstmalig im Mittelpunkt des kleinsten Krümmungskreises auf. Um dies zu verdeutlichen ist auch die Evolute³ der Mittellinie dargestellt (*blau*):

³Die Evolute ist die Kurve, auf der *alle* Krümmungsmittelpunkte einer anderen Kurve liegen.



Nun soll überprüft werden, ob die gegebene Schale überschneidungsfrei ist oder nicht. Dazu muss das Kriterium $dV > 0$ erfüllt sein, wobei $dV = (1 - 2\eta H + \eta^2 K)dA d\eta$. An dieser Stelle erfolgt eine graphische Auswertung von $(1 - 2\eta H + \eta^2 K)$ über der Höhe z , wobei $\eta = h/2$ (*grün*) und $\eta = -h/2$ (*blau*) dargestellt werden :



Offensichtlich ist die Schale im Bereich von $z = 0 \text{ m}$ bis $z = 150 \text{ m}$ überschneidungsfrei, da dV immer positiv ist.